2.1. МАТЕМАТИКА

2.1.1. Характеристика целей и объектов контроля

Назначение экзаменационной работы 2012 г. состоит в оценке уровня общеобразовательной подготовки по математике (алгебре и геометрии) учащихся IX классов общеобразовательных учреждений в целях их государственной (итоговой) аттестации. Результаты выполнения экзаменационной работы выпускниками основной школы могут быть использованы при приеме учащихся в профильные классы средней школы, а также в учреждения начального и среднего профессионального образования.

Содержание экзаменационной работы определялось на основе Федерального компонента государственного стандарта основного общего образования по математике (приказ Минобразования России от 05.03.2004 № 1089 «Об утверждении Федерального компонента государственных образовательных стандартов начального общего, основного общего и среднего (полного) общего образования»). В определении *объектов контроля* нашли отражение концептуальные положения Федерального государственного образовательного стандарта основного общего образования (приказ Минобрнауки России от 17.12.2010 № 1897 «Об утверждении Федерального государственного образовательного стандарта основного общего образования»), в соответствии с которыми результатом освоения основной образовательной программы основного общего образования должна стать математическая компетентность выпускников, т.е. они должны овладеть специфическими для математики знаниями и видами деятельности, а также: научиться преобразованию знания и его применению в учебных и внеучебных ситуациях; сформировать качества, присущие математическому мышлению; овладеть математической терминологией, ключевыми понятиями, методами и приемами.

Содержание и структура экзаменационной работы предусматривают проверку наличия у учащихся *базовой математической компетентности* (часть 1) и *математической подготовки повышенного уровня*, достаточной для активного использования полученных знаний при изучении математики и смежных предметов в старших классах на профильном уровне (часть 2). Основное функциональное назначение заданий части 2 – дифференцировать хорошо успевающих школьников по уровням подготовки, выявить наиболее подготовленную часть выпускников, составляющую потенциальный контингент профильных классов.

Объектами контроля в заданиях части 1 работы являются: знание и понимание ключевых элементов содержания (математических понятий, их свойств, математической символики и средств наглядности и проч.); умение пользоваться математической записью; владение основными алгоритмами; умение решать несложные математические проблемы, не сводящиеся к прямому применению алгоритма; умение применять математические знания в несложных практических ситуациях. Объекты контроля в заданиях части 2 характеризуют повышенный и высокий уровень математической подготовки выпускников основной школы. Это умения: интегрировать знания из различных тем курса при решении задач комбинированного характера; проводить доказательства сформулированных утверждений; владеть некоторыми специальными приемами решения задач; использовать разнообразные способы рассуждений при исследовании математических ситуаций; математически грамотно и ясно записывать решение, приводя при этом необходимые пояснения и обоснования.

Проверка перечисленных качеств математической подготовки осуществляется на базе основного содержания курса 5 – 9 классов и связана с контролем уровня владения предметными умениями. Это умения: выполнять вычисления с рациональными числами и квадратными корнями в ходе решения различных задач; выполнять преобразования алгебраических выражений, решать уравнения, неравенства и их системы; строить и читать графики функций, применять графические представления при решении уравнений, систем уравнений, неравенств; работать со статистической информацией, представленной в различных формах; находить средние ряда данных, частоту и вероятность случайного события; применять изученные свойства геометрических фигур к решению геометрических задач на вычисление и доказательство.

2.1.2. Краткая характеристика КИМ ГИА-9 2012 года

Основное отличие экзаменационной работы 2012 г. от работ предыдущих лет заключается в том, что в нее включены задания, направленные на проверку усвоения курса геометрии основной школы. Таким образом, содержание работы охватывает вопросы, относимые программой к разделам арифметики, алгебры, вероятности и статистики, геометрии.

Работа состоит из двух частей. *Часть 1*, нацеленная на проверку овладения курсом на базовом уровне, содержит 18 заданий, в совокупности охватывающих все разделы курса (арифметика – 2 задания, алгебра – 10 заданий, вероятность и статистика – 2 задания, геометрия – 4 задания), и предусматривающих три формы ответа: задания с выбором ответа из четырех предложенных вариантов (3 задания), задания с кратким ответом (14 заданий), задание на соотнесение (1 задание). Каждое задание части 1 соотносится с одной из следующих категорий познавательной области: *знание/понимание*, *применение алгоритма*, *применение знаний для решения математической задачи*, *рассуждение*, *применение знаний в практической ситуации*.

Часть 2, направленная на проверку владения материалом на повышенном и высоком уровнях, содержит 5 заданий из различных разделов курса математики (2 задания по геометрии, 3 задания по алгебре). Все задания требуют полной записи решения и ответа. Задания части 2 расположены по нарастанию трудности – от относительно простых до сложных, предполагающих свободное владение материалом и высокий уровень математической культуры.

Задания части 2 экзаменационной работы направлены на проверку таких качеств математической подготовки выпускников, как уверенное владение формально-оперативным алгебраическим аппаратом; умение решить планиметрическую задачу, применяя различные теоретические знания курса геометрии; умение решить комплексную алгебраическую задачу, включающую в себя знания из разных тем курса; умение математически грамотно и ясно записать решение, приводя при этом необходимые пояснения и обоснования; владение широким спектром приемов и способов рассуждений.

Фактически во второй части работы представлены задания трех разных уровней. Первое (задание 19) наиболее простое из них. Оно направлено на проверку владения формально-оперативными навыками: преобразование выражения; решение уравнения, неравенства, системы; построение графика. По уровню сложности это задание лишь немногим превышает обязательный уровень. В 2012 г. задания относились к разделам *выражения и их преобразования*.

Следующие два задания (20 и 21) сложнее первого и в техническом, и в логическом отношении, при их выполнении приходится интегрировать знания из различных разделов курса, т.е. они имеют комплексный характер. В 2012 г. это были: геометрическая задача на доказательство (20), текстовая задача на составление уравнения, задача по теме «Геометрическая прогрессия» (21).

И наконец, последние два задания (22 и 23) наиболее сложные, они требуют свободного владения материалом и довольно высокого уровня математического развития. Рассчитаны эти задачи на выпускников, изучавших математику более основательно; это, например, углубленный курс математики, элективные курсы в ходе предпрофильной подготовки, математические кружки и проч. Хотя эти задания не выходят за рамки содержания, предусмотренного стандартом основной школы, при их выполнении выпускник имеет возможность продемонстрировать владение довольно широким набором некоторых специальных приемов (выполнения преобразований; решения уравнений, систем уравнений), проявить некоторые элементарные умения исследовательского характера. В 2012 г. на этих местах были представлены *разделы геометрия, функции*.

2.1.3. Основные результаты ГИА-9 2012 года по математике

Анализ результатов экзамена проводится на основе данных 17 базовых регионов. Общая численность выборки составляет более 290 тыс. учащихся.

Оценивание результатов выполнения работ учащимися в 2012 г., как и в предыдущие годы, осуществлялось с помощью двух количественных показателей: традиционной отметки и общего балла, назначение которого – расширение диапазона традиционных отметок. Принципиальной позицией является наличие минимального проходного критерия: чтобы получить положительную оценку, ученик должен выполнить не менее восьми заданий части 1 работы.

Подходы к начислению баллов за выполнение заданий части 1 и части 2 не отличаются от принятых в прошлом году. За каждое верно решенное задание *части1* учащемуся начислялся 1 балл. За верное выполнение заданий *части 2* – 2 балла (задание 19), 3 балла (задания 20 и 21) и 4 балла (задания 22 и 23).

Общий балл формируется путем суммирования баллов, полученных учащимся за выполнение частей 1 и 2 работы. В итоге за часть 1 максимально можно получить 18 баллов, за часть 2 – 16 баллов, за работу в целом – 34 балла. Задание части 2 оценивается максимальным баллом, если учащийся выбрал правильный путь решения, из письменной записи решения понятен ход его рассуждений, получен верный ответ. Если в решении допущена ошибка, не имеющая принципиального характера и не влияющая на общую правильность хода решения, то учащемуся засчитывается балл, на 1 меньший максимального. Других возможности не предусматривается.

Основное назначение общего балла – повышение информативности традиционной отметки, расширение диапазона отметок «4» и «5» и более детальная их дифференциация. Он связан с отметкой по пятибалльной шкале следующим образом: менее 8 баллов за часть 1 работы – отметка «2»; от 8 до 14 баллов – отметка «3»; от 15 до 21 балла – отметка «4»; от 22 до 34 баллов – отметка «5». Ниже в таблице 2.1 приведены данные о распределении отметок по пятибалльной шкале, а на рисунке 2.1 – гистограмма распределения общего балла.

Таблица 2.1. Распределение отметок по пятибалльной шкале

Аттестационная отметка	Число учащихся	% учащихся
«2»	27079	9,33
«3»	127276	43,87
«4»	76953	26,52
«5»	58848	20,28

Эти данные получены путем независимого оценивания в ходе статистической обработки результатов в ФИПИ и могут расходиться с данными, имеющимися в территориях. Надо обратить внимание также на то, что разброс по каждой из отметок по территориям весьма значителен.

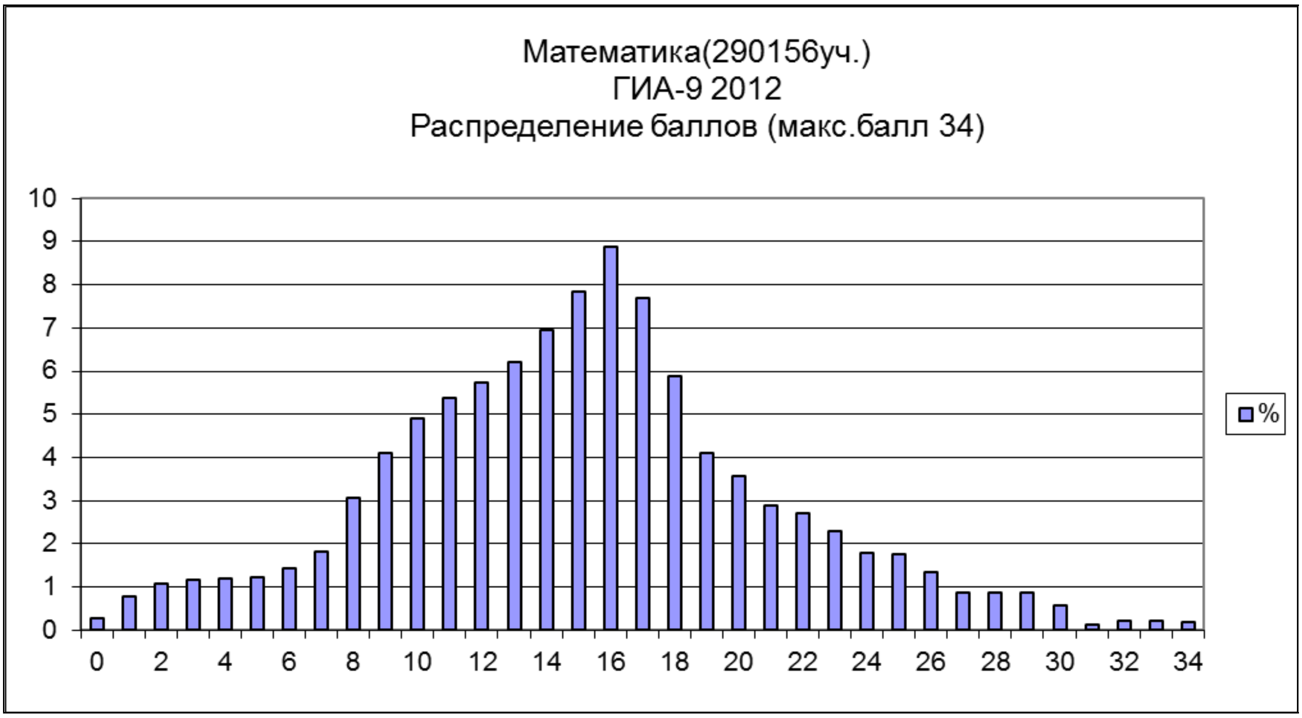


Рисунок 2.1. Распределение баллов (максимальный балл – 34)

Введение общего балла позволяет использовать больше градаций для характеристики подготовки успевающих учащихся. Так, примерно две трети выпускников, получивших отметку «4» (или 26% от общего числа учащихся), имеют 15–18 баллов. Это «минимальная четверка», характеризующая в основном подготовку тех учащихся, которые или ограничились выполнением заданий только части 1 (от 15 до 18 заданий) или выполнили одно несложное задание из части 2. В то же время можно выделить достаточно большую группу сильных «четверочников», получивших от 19 до 21 балла, их уровень подготовки можно считать близким к «пятерке». У них сформированы базовые знания и умения, и они способны решать стандартные задачи повышенных уровней. Как и в предшествующие годы, это примерно треть получивших отметку «4» (12% от общего числа учащихся).

Выпускники, получившие отметку «5», подразделяются на три группы. Немного больше половины таких школьников (11% от общего числа учащихся) имеют «минимальную пятерку» с общим баллом от 22 до 26. Эти учащиеся в полной мере владеют базовыми знаниями и умениями и демонстрируют умение решать задачи повышенного уровня из различных разделов курса. «Пятерку» с высоким рейтингом – от 27 до 30 баллов – имеют примерно треть «пятерочников» (6% от общего числа учащихся). Это учащиеся, которые показали свободное владение материалом на базовом уровне, умение находить пути решения задач в ситуациях, отличающихся от стандартных. Они решили хотя бы одну задачу высокого уровня «на 4 балла». И наконец, «пятерку» с очень высоким баллом, от 31 до 34, имеют около 3% учащихся. Это те девятиклассники, которые справились полностью или с небольшими недочетами со всей работой. Они свободно владеют материалом курса и уверенно справляются с ситуациями, требующими нестандартных подходов и определенных исследовательских навыков. Их отличает также умение ясно и в последовательной логике изложить на бумаге свои рассуждения при решении задачи.

2.1.4. Анализ результатов выполнения заданий экзаменационной работы

Ниже приведены результаты выполнения заданий в базовых регионах по разделам примерной программы «Арифметика», «Алгебра», «Вероятность и статистика», «Геометрия». В таблицах приводится средний процент выполнения конкретных заданий.

№	*Содержание задания*	*Познавательная категория*	*Выполнили верно* (%)
1	Выполнение вычислений с рациональными числами	Алгоритм	87,71
2	Понимание соответствия между числами и точками координатной прямой	Понимание	84,51
3	Решение арифметической текстовой задачи: на деление в данном отношении; на вычисления с процентами	Практическое применение	81,98 84,67 75,84

Анализ выполнения заданий экзамена с арифметической составляющей курса показал, что в целом учащиеся справляются с простейшими вычислениями с рациональными числами и с заданиями, которые условно можно обозначить как «числа и координатная прямая». Приведем примеры заданий разных вариантов (вычисления с рациональными числами, соответствие между числами и точками координатной прямой).

Пример 1.

Для каждого выражения укажите его значение.

ВЫРАЖЕНИЕ

А) $1{,}4\cdot\frac{3}{7}$

Б) $1:\frac{4}{7}$

В) $0{,}7+\frac{4}{5}$

ЗНАЧЕНИЕ ВЫРАЖЕНИЯ

1) $1{,}5$

2) $0{,}6$

3) $\frac{4}{7}$

4) $\frac{7}{4}$

Ответ:

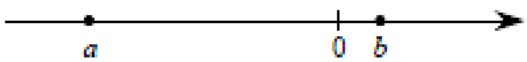
А	Б	В

Пример 2.

Найдите значение выражения $15\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^2-8\cdot\frac{1}{5}$.

Пример 3.

На координатной прямой отмечены числа a **и** b.



Какое из следующих чисел наибольшее?

1) $a+b$ 2) $-a$ 3) $2b$ 4) $a-b$

Полученные результаты по обоим заданиям на вычисление стабильны и значимо не различаются в зависимости от варианта или региона.

Задание на понимание соответствия между числами и точками координатной прямой не является новым, подобные задания достаточно часто включаются в экзаменационную работу. Для выполнения данного задания учащиеся должны сделать соответствующее умозаключение, используя нужную информацию о числах a и b, заданную рисунком, а также знания о свойствах чисел и арифметических операций над ними. Средний процент правильного выполнения этой серии заданий вполне удовлетворителен, но результаты различаются по регионам: от 89% до 78%.

Задачи, связанные с делением величины в данном отношении и с процентными вычислениями, дали достаточно ровные результаты. С первой из них в различных регионах справилось 72–85%, со второй – 71–79%.

Пример 4.

Площадь земель крестьянского хозяйства, отведенная пол посадку сельскохозяйственных культур, составляет 24 га и распределена между зерновыми и овощными культурами в отношении 5:3. сколько гектаров занимают зерновые культуры?

Основные ошибки при решении задач этой серии связаны с тем, что учащиеся находили соответствующую площадь для другой культуры или значение площади, соответствующее одной части (примерно 8% учащихся допускали ту или иную из этих ошибок).

Ниже приведен пример одного из вариантов задачи на проценты.

Пример 5.

Спортивный магазин проводит акцию: «Любой джемпер по цене 300 рублей. При покупке двух джемперов – скидка на второй 80%». Сколько рублей придется заплатить за покупку двух джемперов?

Наиболее распространенная ошибка (примерно 9–12% учащихся по разным вариантам) заключается в том, что учащиеся находят величину скидки в рублях и прибавляют ее к исходной цене, не находя новую цену товара. Иными словами, они допускают типичную ошибку при решении задач на уменьшение или увеличение величины на несколько процентов. Другие многочисленные ошибки менее представительны, но среди них целесообразно обратить внимание на следующие две. Некоторые учащиеся считают, что стоимость товара при заданной скидке, например как в этой задаче, – 80%, составляет 20 руб., т.е. (100 – 80) руб. Есть случаи, когда скидка берется от стоимости не второго джемпера (футболки и проч.), а двух экземпляров товара.

Таблица 2.3. Алгебра

№	*Содержание задания*	*Познавательная категория*	*Выполнили верно* (%)
Алгебраические выражения. Преобразование алгебраических выражений			
1	Выражение из формулы одной величины через другие	Практическое применение	64,6
2	Составление буквенного выражения по условию задачи	Решение задачи	49,1
3	Преобразование целых выражений, вычисление значения буквенного выражения при заданных значениях букв	Алгоритм	75,1
4	Преобразование дробных выражений, вычисление значения буквенного выражения при заданных значениях букв	Алгоритм	71,5
5	Преобразование выражений, содержащих квадратные корни	Решение задачи	78,4
Уравнения и неравенства			
6	Решение квадратного уравнения	Алгоритм	77,6
7	Решение системы линейных неравенств с одной переменной	Алгоритм	68,6
8	Нахождение решения системы двух уравнений с двумя переменными с помощью готового графика	Знание/понимание	66,4
Функции. Арифметическая и геометрическая прогрессии			
9	Чтение графика числовой функции	Знание/понимание	57,3

10	Чтение графика реальной зависимости	Практическое применение	85,0
11	Решение задачи на арифметическую прогрессию с применением формул общего члена и суммы первых n членов	Знание/понимание	64,7

Анализ результатов выполнения заданий по алгебре показывает, что учащиеся лучше справляются с заданиями алгоритмического характера, нежели с заданиями на понимание, практическое применение или решение задач. Учитывая результаты предыдущих лет, это уже можно считать тенденцией. Характерно, что это проявляется по всем содержательным линиям, относящимся к данному разделу: алгебраические преобразования; решение уравнений, систем уравнений, неравенств.

Задание на выражение из формулы (физической или геометрической) одной величины через другие, как и в прошлые годы, вызывает определенные трудности у значительной части учащихся. Успешность выполнения зависит от вида формулы: с линейной зависимостью справляются лучше, чем с формулой более сложной структуры. С формулой типа $v = v_0 + at$,из которой нужно выразить *t,* справилось от 67 до 72% учащихся (по разным вариантам), с формулой типа $l = \frac{\pi R \varphi}{180}$, из которой нужно было выразить φ, справилось в среднем 60% учащихся. Ни тот, ни другой результат нельзя признать удовлетворительным, так как формулы знакомы девятиклассникам, им приходится достаточно много работать с ними, соответствующее умение потребуется им и при освоении курса математики старшей школы.

Задание на составление буквенного выражения по условию задачи выполняет менее половины учащихся. Приведем пример задачи одного из вариантов.

<u>Пример 6</u>.

Автомобиль проехал 200 километров и израсходовал при этом a литров бензина. Сколько литров бензина потребуется, чтобы проехать 37 километров при таких же условиях езды? Запишите соответствующее выражение.

Учитывая, что в задаче использована наиболее часто встречающаяся в курсе зависимость (прямая пропорциональность) и сюжет не является необычным или незнакомым, можно констатировать, что ко времени окончания основной школы учащиеся не научились переводу текста задачи на символьный язык – одному из важнейших базовых умений, которые должны быть сформированы в курсе алгебры.

С заданиями на владение основными алгоритмами справились 72–78% выпускников. Это действия с многочленами, алгебраическими дробями, квадратными корнями; решение квадратных уравнений. Исключение из этой группы заданий, как и в предыдущие годы, составило решение простейшей системы линейных неравенств. Приведем пример одного из вариантов.

<u>Пример 7</u>.

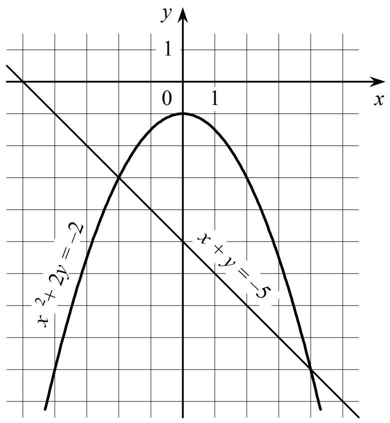
Найдите наибольшее значение x, удовлетворяющее системе неравенств

$$\begin{cases} 5x + 15 \le 0, \\ x + 5 \ge 1. \end{cases}$$

Примерно треть учащихся не справляется с решением системы неравенств в простейшей ситуации. При этом значительная часть ошибок в этой серии заданий (12–15%) связана со слабым владением элементарными арифметическими умениями. Выпускники ошибаются в знаках при делении отрицательного числа на положительное, не могут сравнить два целых отрицательных числа.

Невысокий результат получен при выполнении задания, в котором требовалось, используя предложенный график, найти решение системы двух уравнений с двумя переменными. Пример задания одного из вариантов приведен ниже.

Пример 8. Используя рисунок, решите систему уравнений $\begin{cases} x^2 + 2y = -2, \\ x + y = -5. \end{cases}$



От трети до половины учащихся (по разным регионам) не смогли просто «считать» с рисунка координаты точек пересечения графиков. Иными словами, столь значительная часть экзаменуемых проявили содержательное непонимание смысла понятия «решение системы уравнений с двумя переменными», отсутствие в их сознании связи формального определения этого понятия и его графической интерпретации. Этот результат еще раз подтверждает вывод о наличии формализма в знаниях школьников, полученный в предыдущие годы. Необходимо подчеркнуть, что во всех имеющихся учебниках алгебры уделяется внимание вопросу о графической иллюстрации решения систем уравнений. Однако в практике преподавания основной акцент делается на отработку соответствующих алгоритмов, что, впрочем, как показывает опыт экзаменов, все равно не позволяет добиться от всех учащихся хорошего их усвоения.

Результаты выполнения заданий из блока «Функции. Арифметическая и геометрическая прогрессии» показывают, что учащиеся справились с вопросами по «реальному» графику. Приведем пример одного из вариантов задания.

Пример 9.

На графике изображена зависимость атмосферного давления (в миллиметрах ртутного столба) от высоты местности над уровнем моря (в километрах). На сколько миллиметров ртутного столба атмосферное давление на высоте Эвереста ниже атмосферного давления на высоте Эльбруса?

Однако вопросы по графику функции, не привязанной к какой-либо конкретной ситуации, вызвали значительно большие трудности. Учащимся был предложен график функции и три утверждения о ее свойствах, из которых они должны были выбрать неверные. Для этого им надо было по графику определить, например, возрастает или убывает функция на заданном промежутке, принимает она положительные или отрицательные значения, каково ее наибольшее (наименьшее) значение, чему равно значение функции в заданной точке и проч. Более 40% школьников не смогли справиться с этой задачей. У них не сформированы базовые умения, а также наглядные представления, необходимые для изучения функций и их свойств, составляющих значительную часть курса математики старших классов.

Примерно 40% учащихся не справились со стандартной задачей на арифметическую прогрессию, в которой требовалось воспользоваться известной формулой для нахождения члена арифметической прогрессии с заданным номером или суммы первых нескольких ее членов (эти формулы были в справочных материалах, предоставленных учащимся). Ошибки имеют в основном вычислительный характер и связаны с тем, что учащиеся или не смогли определить нужные значения для подстановки в формулу, или выполнили подстановку неверно, или же не сумели воспользоваться справочными материалами, что говорит о недостаточной сформированности общих учебных умений.

В части 2 работы, направленной на проверку повышенных уровней подготовки, было три алгебраических задания. Первое из них было направлено на проверку владения формально-оперативными умениями на уровне, несколько превышающем базовый, что является важной характеристикой учащихся, претендующих на повышенную оценку и, возможно, планирующих изучать математику на профильном уровне. Задания в разных вариантах были связаны с преобразованием дробных выражений. Безошибочное выполнение задания оценивалось, исходя из 2 баллов. Приведем пример одного из вариантов.

Пример 10.

Упростите выражение $\frac{6}{a-1}-\frac{10}{(a-1)^2}:\frac{10}{a^2-1}-\frac{2a+2}{a-1}$.

С заданиями этой группы справилось от 26 до 36% выпускников. Причем они были выполнены и небольшим процентом учащихся, получивших отметку «3» (6), но в основном правильное его выполнение продемонстрировали школьники, получившие «4» (27%) и «5» (84%). Необходимо сказать, что средний процент выполнения заданий этой серии (32,2) несколько ниже аналогичных цифр за предыдущие годы. Возможно, это связано с тем, что у учащихся увеличился объем подготовки, и они больше внимания уделили геометрии, что, с одной стороны, можно рассматривать как положительный факт, а, с другой – следует обратить внимание на нежелательность сильного снижения уровня алгебраической подготовки.

Второе задание по алгебре в части 2 экзаменационной работы, оцениваемое, исходя из 3 баллов, в одной группе вариантов – это текстовая задача на составление уравнения, в другой – задача на геометрическую прогрессию. Приведем примеры.

Пример 11.

Рыболов проплыл на лодке от пристани некоторое расстояние вверх по течению реки, затем бросил якорь, 2 часа ловил рыбу и вернулся обратно через 5 часов от начала путешествия. На какое расстояние от пристани он отплыл, если скорость течения реки равна 2 км/ч, а собственная скорость лодки – 6 км/ч?

Пример 12.

В геометрической прогрессии сумма первого и второго членов равна 150, а сумма второго и третьего членов равна 75. Найдите первые три члена этой прогрессии

Решение текстовых задач традиционно вызывает трудности даже у «сильных» учащихся. Этому соответствуют и результаты выполнения первой из указанных задач. С ней справились 18,9% учащихся, хотя ее нельзя отнести к разряду сложных. Для составления уравнения не требуется переформулировки или интерпретации условия, уравнение составляется «впрямую», по ходу чтения задачи и является линейным. При этом от 3 до 5% школьников правильно составив уравнение, допустили вычислительную ошибку при нахождении корня уравнения. Показательно, что задачу решили примерно три четверти «пятерочников» и только десятая часть «четверочников». Проблема текстовых задач отмечалась не раз, она требует пристального внимания и является проблемой методического характера.

Задача на геометрическую прогрессию оказалась существенно труднее текстовой задачи. С ней справились примерно 8% учащихся. По-видимому, основная причина неудачи при ее решении состояла в том, что учащиеся или не смогли найти ход ее решения, или не справились с составленной системой уравнений, в которой требовалось «увидеть», как применить стандартный способ подстановки.

Последняя задача наиболее трудная и рассчитана на учащихся, получивших в той или иной форме более глубокую, чем в рамках пятичасового курса, математическую подготовку. Она связана с умением строить графики функций и анализировать их свойства. Ниже приведен пример одного из вариантов.

Пример 13.

Постройте график функции $y = x^2 - 3|x| - x$ и определите, при каких значениях c прямая $y = c$ имеет с графиком ровно три общие точки

Результат соответствует ожидаемому. С задачами этой группы справилось 6,94% девятиклассников.

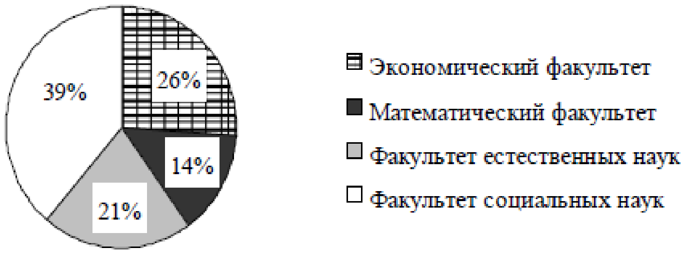
Таблица 2.4. Вероятность и статистика

№	*Содержание задания*	*Познавательная категория*	*Выполнили верно (%)*
1	Уметь работать со статистической информацией, находить частоту и вероятность случайного события	Практическое применение	78,3
2	Уметь работать со статистической информацией, вычислять средние значения результатов измерений	Практическое применение	84,3

Проверка усвоения материала вероятностно-статистической линии осуществлялась в этом, как и в предыдущие годы, только на базовом уровне. В часть 1 работы были включены два задания (10 и 11), первое из которых относилось к теории вероятностей, второе – к статистике. Первое задание – с выбором ответа, второе – с кратким ответом. Ниже приводятся примеры заданий.

Пример 14. Задание 10 (план 1)

На круговой диаграмме показано распределение (в процентах) студентов университета по факультетам. Для участия в телевикторине случайным образом выбирают одного студента университета.



Вероятность какого из следующих событий наибольшая?

1) Будет выбран студент экономического факультета
2) Будет выбран студент математического факультета
3) Будет выбран студент факультета естественных наук
4) Будет выбран студент факультета социальных наук

Основное проверяемое требование – уметь находить вероятность случайного события; уметь использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни.
Элемент содержания: представление данных в виде диаграмм (8.1.1); частота события, вероятность (8.2.1).

Пример 15. Задание 10 (план 2)

В девятом гуманитарном классе учится 18 девочек и 7 мальчиков. По жребию они выбирают одного дежурного по классу. Какова вероятность того, что это будет мальчик?

1) $\frac{7}{18}$ 2) $\frac{7}{25}$ 3) $\frac{18}{25}$ 4) $\frac{1}{7}$

Основное проверяемое требование – уметь находить вероятность случайного события; уметь использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни.
Элемент содержания: представление данных в виде диаграмм (8.1.1); равновозможные события и подсчет их вероятности (8.2.2).

Пример 16. Задание 11 (план 1)

Василий измерял в течение недели время, которое он тратил на дорогу до школы, а результаты записывал в таблицу.

День недели	Пн	Вт	Ср	Чт	Пт	Сб
Время (мин.)	19	20	21	26	23	17

Сколько минут в среднем занимает у Василия дорога до школы?

Ответ: ___________________________.

Основное проверяемое требование – уметь работать со статистической информацией; уметь использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни.
Элемент содержания: представление данных в виде таблиц (8.1.1); средние результаты измерений: среднее арифметическое (8.1.2).

Пример 17. Задание 11 (план 2)

В таблице даны результаты забега мальчиков 5-го класса на дистанцию 30 м.

Номер дорожки	1	2	3	4
Время (с)	6,3	5,7	6,9	6,0

Зачёт выставляется, если показано время не хуже 5,9 с. Выпишите номера дорожек, по которым бежали мальчики, получившие зачёт.

Ответ: ___________________________.

Основное проверяемое требование – уметь работать со статистической информацией; уметь использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни.
Элемент содержания: представление данных в виде таблиц (8.1.1); сравнение рациональных чисел (1.3.3).

С заданием 10 справились в среднем 78% учащихся. Порядка четверти учащихся при определении вероятности в заданиях первого плана вместо наибольшего значения находили наименьшее, а вместо наименьшего – наибольшее. Трудно сказать, связана ли эта преобладающая ошибка с понятием вероятности или является результатом отсутствия концентрации внимания. В заданиях второго плана подобной массовой ошибки нет: все дистракторы оказались одинаково «востребованными». Часть учащихся из числа не справившихся с этим заданием вместо того, чтобы выбрать отношение числа мальчиков к общему числу учащихся класса (ответ 2), выбрали отношение числа мальчиков к числу девочек (ответ 1), отношение числа девочек к общему числу учащихся класса (ответ 3) или решили, что искомая вероятность равна вероятности выбора одного из семи мальчиков класса (ответ 4).

С заданием 11 справились в среднем 84% учащихся. Основные ошибки при выполнении заданий первого плана связаны с непонимание того, о какой средней характеристике говорится в задаче, и подменой среднего арифметического другими средними: медианой (которая в ряде случаев находилась для неупорядоченного ряда) и модой. Имели также место ошибки вычислительного характера при нахождении суммы шести чисел или при делении этой суммы на 6, а также ошибки, допущенные по невнимательности, ввиду неумения спланировать решение задачи и проконтролировать каждый ее шаг, отсутствия самоконтроля. Так, некоторые учащиеся «забывали» выполнить деление и указывали в качестве ответа найденную сумму, некоторые делили сумму не на 6, а на 5 и т.п. Основные ошибки при выполнении заданий второго плана связаны с несформированностью представлений о величинах: учащиеся не смогли верно интерпретировать выражение «не хуже 5,9 с», чаще всего трактуя его как «чем больше, тем лучше». Это свидетельствует об отрыве математических знаний от их жизненных представлений таких учащихся, а их оказалось порядка 20%.

В таблице 2.5 даны результаты выполнения заданий 10 и 11 отдельными группами учащихся, распределенными на основании отметки, полученной за выполнение экзаменационной работы в целом.

Таблица 2.5. Средний процент выполнения заданий вероятностно-статистической линии в зависимости от отметки (%)

Номер задания	*Отметка*			
	«2»	*«3»*	*«4»*	*«5»*
10	69	77	77	88
11	40	81	95	97

Эти результаты по всем категориям учащихся соотносятся с результатами, показанными по традиционным разделам курса математики, что говорит о преодолении психологического барьера, связанного с новизной материала, реалистичности предъявляемых требований. Кроме того, хорошо видно, что оба задания – и по статистике, и по вероятности – относятся к числу решаемых «самыми» слабыми учащимися, которые не смогли преодолеть установленный минимальный критерий.

Таблица 2.6. Геометрия.

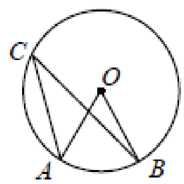
№	*Содержание задания*	*Познавательная категория*	*Выполнили верно (%)*
1	Использование приобретенных знаний и умений в практической деятельности и повседневной жизни	Практическое применение	67,4
2	Нахождение площади трапеции, использование при этом свойств прямоугольного треугольника	Решение задачи	72,6
3	Нахождение величины центрального угла, опирающегося на ту же дугу, что и заданный вписанный угол	Решение задачи	71,4
4	оценивание логической правильности утверждений, распознавание ошибочных утверждений	Рассуждение	44,4

Анализ выполнения заданий по геометрии показывает, что задания, относящиеся к разным темам курса, выполняются на одном уровне: справляются с ними от 64 до 79% учащихся. Приведем примеры заданий одного из вариантов.

Пример 18.

Точка O – центр окружности, $\angle ACB = 25°$ (см. рисунок). Найдите величину угла AOB (в градусах).

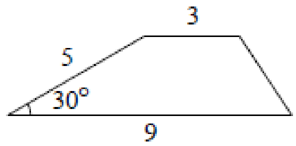
Ответ: ____________________________.



Пример 19.

Боковая сторона трапеции равна 5, а один из прилегающих к ней углов равен 30°. Найдите площадь трапеции, если её основания равны 3 и 9.

Ответ: ____________________________.

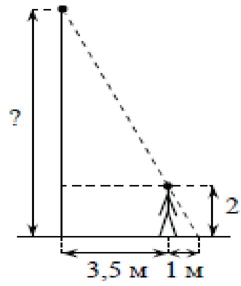


В первом из этой пары заданий необходимо лишь распознать базовые конфигурации «вписанный угол» и «центральный угол» и применить известную теорему. Характерная ошибка здесь – данная в условии величина не удвоена, т.е. центральный угол оказался равен вписанному, хотя даже по рисунку видно, что это неверно. Второе задание представляет собой простейшую геометрическую задачу, которую можно решить, используя формулу площади трапеции $S = \frac{a+b}{2}h$ (она была в справочных материалах, которыми располагали учащиеся), для чего определить высоту как катет прямоугольного треугольника, лежащий против угла в 30°. Одна из типичных ошибок – незнание необходимой формулы и неумение воспользоваться справочными материалами.

В эту же группу вошли и задания с сюжетными практическими ситуациями, относящимися к теме «Подобие». Вот пример одного такого задания.

Пример 20.

Человек, рост которого равен 2 м, стоит на расстоянии 3,5 м от уличного фонаря. При этом длина тени человека равна 1 м. Определите высоту фонаря (в метрах).



Ответ: ___________________________.

Самая распространенная ошибка, допущенная при выполнении этого задания, типична: решение не доведено до конца. Около 8% учащихся верно идентифицировали конфигурацию, распознали подобные треугольники, составили отношения и нашли неизвестный элемент, однако ими была найдена лишь часть высоты столба, они не приплюсовали к ней рост человека. Это произошло либо из-за отсутствия самоконтроля, либо из-за того, что изначально длина стороны одного треугольника не была увеличена на 1 м.

В заданиях второго плана ситуация колодца с журавлем является менее стандартной: подобные треугольники надо было нарисовать самостоятельно, задать их элементы. Поэтому здесь результаты примерно на 10% ниже, чем в приведенной выше задаче первого плана. Что касается ошибок, то порядка 10%, видимо, допустили элементарную вычислительную ошибку, а около 7% не поняли именно геометрию сюжета, решив, что больший конец журавля опускается на столько метров, на сколько меньший поднимается.

В работу 2012 г. впервые были включены задания, отнесенные к категории «Рассуждение». Учащимся были даны три утверждения относительно геометрических фигур или геометрических величин, из которых надо было выбрать верные. Для его выполнения необходимо владеть знаниями основных фактов курса и владеть определенными логическими приемами: умением применить общее утверждение к конкретному случаю, вывести следствие, привести контрпример, рассмотреть частный случай, а также переформулировать утверждение в эквивалентное ему утверждение или записать его в виде формулы. Приведем пример одного из заданий.

Пример 21.

Какие из данных утверждений верны? Запишите их номера.

1) Через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести прямую, параллельную этой прямой.
2) Треугольник со сторонами 1, 2, 4 существует.
3) Если в ромбе один из углов равен 90°, то такой ромб — квадрат.

Ответ: ___________________________.

В среднем с заданиями справились 44,4% учащихся, однако разброс по вариантам огромен: от 13 до 83%. Результаты показывают, что большая часть учащихся способна лишь распознать известные теоремы или распознать как неверное утверждение теорему, сформулированную с очевидной ошибкой. Например, такой «признак равенства треугольников»: если две стороны одного треугольника соответственно равны двум сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны. И даже хорошо успевающие учащиеся не справляются с простейшими логическими операциями. Самым сложным оказалось переформулировать утверждение или записать соответствующую ему формулу, например: площадь треугольника меньше произведения его сторон.

В части 2 работы, направленной на проверку повышенных уровней подготовки, было две геометрические задачи. Первая из них была направлена на проверку умения проводить несложные доказательства, которыми должны владеть все учащиеся, претендующие на отметки «4» или «5». Оценивалась она исходя из трех баллов. Приведем пример такой задачи.

Пример 22.

В параллелограмме $ABCD$ точка E — середина стороны AB. Известно, что $EC = ED$. Докажите, что данный параллелограмм — прямоугольник.

Выполнили ее 13,4% выпускников, из них максимальный балл получили чуть больше половины. А это означает, что справились далеко не все из тех, кто получил отметку «5», что является показателем огромных проблем с обучением геометрии в основной школе. По сложности данная задача не отличается существенно от задачи о площади трапеции из части 1 работы ни по количеству шагов решения, ни по известности используемых фактов, однако разрыв в результатах выполнения огромен – 13,2% против 72,6%. Одна из причин известна давно: задачи «на доказательство» считаются учащимися более трудными, чем задачи «на вычисление», что не соответствует действительности, а является следствием методических проблем.

Последняя, самая сложная задача экзаменационной работы также по геометрии. Она была ориентирована на учащихся, имеющих высокий уровень математической подготовки, учащихся школ и классов с углубленным изучением математики. Здесь результат прогнозируем – 1,3%, он соответствует уровню сложности самого задания. Ниже приводится одна из задач.

Пример 23.

Стороны AC, AB, BC треугольника ABC равны $2\sqrt{3}$, $\sqrt{7}$ и 1 соответственно. Точка K расположена вне треугольника ABC, причём отрезок KC пересекает сторону AB в точке, отличной от B. Известно, что треугольник с вершинами K, A и C подобен исходному. Найдите косинус угла AKC, если $\angle KAC > 90°$.

2.1.5. Анализ выполнения заданий выпускниками с различным уровнем подготовки

В задачи экзамена входит проверка сформированности у всех учащихся базовой математической подготовки, которая составляет функциональную основу общего образования, а также выявление учащихся, имеющих повышенный уровень подготовки, достаточной для изучения математики в старших классах на профильном уровне. Экзаменационная работа продемонстрировала свои хорошие дифференцирующие качества, которые проявляются и в части 1 и в части 2 работы. На рисунке 2.2 хорошо видно, что уже по части 1 имеются различия, хотя и не столь существенные, между группами учащихся, получивших отметку «4» и отметку «5». Также видно, как неустойчива подготовка «троечников», и как глубоко лежит уровень незнания группы «двоечников.

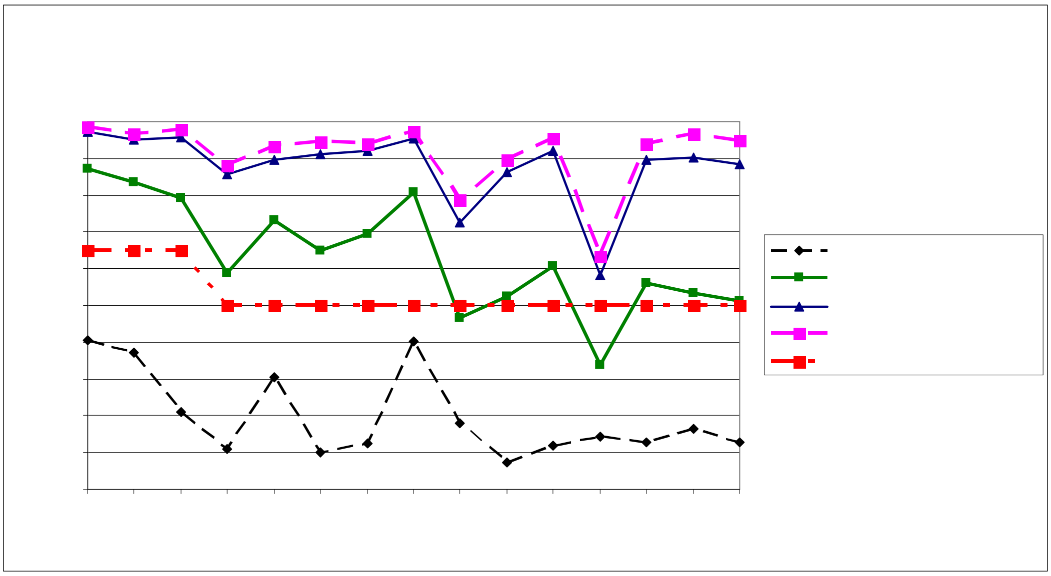


Рисунок 2.2. Выполнение заданий части 1 работы выпускниками с разным уровнем подготовки

Результаты выполнения заданий части 2 свидетельствуют о том, что эти задания решают задачу дифференциации наиболее подготовленных учащихся (имеющих отметку «4» или «5»). Минимальный разрыв между средними процентами выполнения заданий по группе «пятерочников» и по группе «четверочников» составляет около 35%. Это хорошо видно на рисунке 2.3.

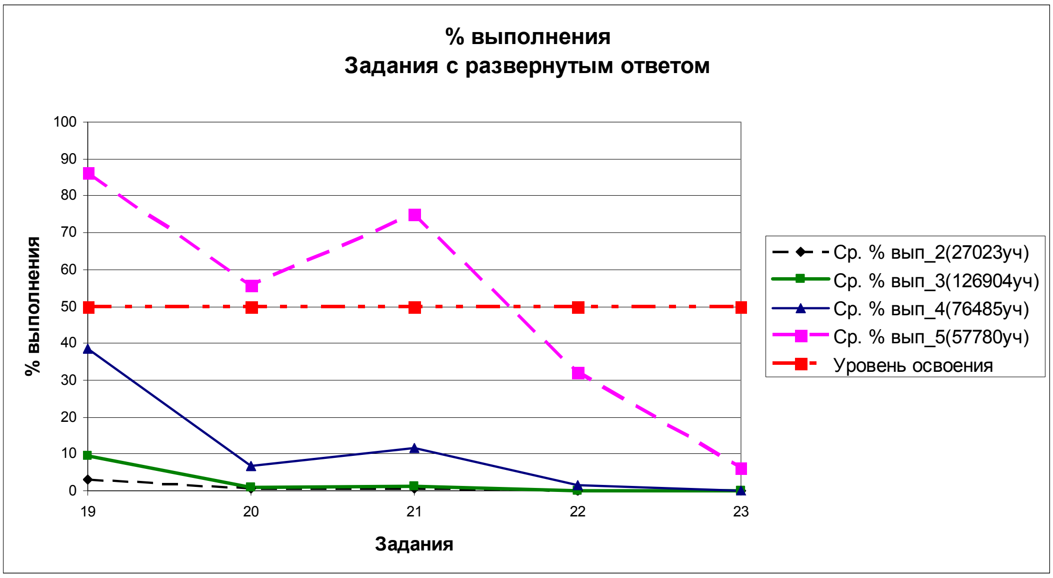


Рисунок 2.3. Выполнение заданий части 2 работы выпускниками с разным уровнем подготовки

Для того чтобы выявить особенности математической учащихся каждой из выделенных групп учащихся, результаты по ним были обработаны отдельно.

Учащиеся, получившие отметку «5», в целом продемонстрировали очень хорошее владение материалом на уровне базовой подготовки. Результаты выполнения заданий части 1 экзаменационной работы находятся в диапазоне от 80 до 98%, при этом 13 заданий выполнены более чем на 90%. Наиболее низкие проценты выполнения показаны по двум заданиям, в которых было необходимо выбрать верные утверждения относительно геометрических фигур (задание 15) или свойств изображенной на графике функции (задание 12): 63 и 78 соответственно.

Процент выполнения заданий повышенного и высокого уровней (часть 2 работы), показанные этой группой учащихся, представлены в таблице 2.7.

Таблица 2.7

Номер задания	19	20	21	22	23
Процент выполнения	86	56	75	32	6

Учащиеся, получившие отметку «4», продемонстрировали стабильное владение материалом на уровне базовой подготовки. Результаты выполнения 12 заданий части 1 экзаменационной работы оказались выше 90%. Несколько более низкие результаты показаны по заданиям 6 (86%), 12 (72%), 15 (56%), 10 (77%), 13 (86%), 18 (88%).
Процент выполнения заданий части 2 работы, показанный этой группой учащихся, представлен в таблице 2.8.

Таблица 2.8

Номер задания	19	20	21	22	23
Процент выполнения	39	7	12	1,4	0,09

Учителям следует обратить внимание на то, что уже первое, наиболее простое, задание части 2 выполняют чуть более трети «четверочников», а второе и третье – около 10%. Это говорит о более низком, чем ожидалось, уровне сформированности алгебраического и логического аппаратов (в прошлые годы эти задания выполнялись лучше). Причина тому может крыться в возможных пробелах в базовой подготовке, не позволяющих им решать более сложные задачи. Эти проблемы необходимо выявлять и ликвидировать на этапе подготовки к экзамену. Данную группу учащихся целесообразно нацеливать на безошибочное выполнение части 1. К сожалению, учителя часто переоценивают знания «четверочников» и предлагают им задания неоправданно высокого уровня по сравнению с их реальной подготовкой. Например, не следует забывать, что последние два задания экзаменационной работы предназначены для учащихся, имеющих уровень владения материалом, предъявляемым к учащимся классов с углубленным изучением математики. Задания такого уровня – недостижимая планка для класса с пятью-шестью уроками математики в неделю. А «четверочники», решившие задачи 22 и 23, – это, скорее всего, учащиеся не традиционных, общеобразовательных, а математических классов, имеющих значительные пробелы, в том числе, к сожалению, в базовой подготовке.

Учащиеся, получившие отметку «3», продемонстрировали нестабильное владение материалом на уровне базовой подготовки. Результаты выполнения основной части заданий в этой группе находятся в достаточно широком диапазоне: от 34% (задание 15) до 87% (задание 1). Особенность подготовки учащихся этой группы состоит в том, что они лучше освоили алгоритмическую составляющую курса, но имеют существенные пробелы в понятийной стороне. Возможно, отсюда и проблемы с категорией «решение задач», где нет четкого алгоритма выполнения, а известны лишь общие соображения, из которых учащимся должно быть самостоятельно «собрано» решение задачи. Очень слабую тройку имеют около 12% учащихся.

Что касается части 2 работы, то учащиеся этой группы имели шанс справиться лишь с заданием 19: его выполнили 9,4% «троечников», причем более 4% с потерей одного балла за допущенную описку или вычислительную ошибку. Процент выполнения двух других заданий повышенного уровня едва превысил 1%, что лишний раз доказывает, что, имея существенные пробелы в базовой подготовке, справиться с заданиями повышенной сложности просто невозможно.

Учащиеся, получившие отметку «2», не продемонстрировали владение материалом на уровне базовой подготовки. Результаты выполнения заданий в этой группе находятся в широком диапазоне: от 7 до 69%, а значит, здесь есть и серьезные пробелы, и определенные возможности. Надо отметить и тот факт, что результат этот стабилен уже на протяжении нескольких лет. Это означает, что методика работы со слабо успевающими учащимися не освоена учителями, а массированная подготовка к экзамену в стиле натаскивания, практикуемая в последние годы, результатов не дает. Особенно низки результаты по геометрическим заданиям. Наиболее высокие результаты показаны по двум заданиям, которые относятся к разделу статистики и теории вероятностей, что говорит о хороших перспективах этого раздела, нового для курса математики основной школы.

Результаты проведенного анализа заставляют еще раз указать на необходимость дифференцированного подхода и в процессе обучения, и при подготовке к экзамену: учителю необходимо иметь реальные представления об уровне подготовки каждого учащегося и ставить перед ним ту цель, которую он может реализовать.

2.1.6. Выводы и рекомендации

Анализ результатов, проведенный в 2012 г., в совокупности с качественными и количественными результатами прошлых лет позволяет выявить некоторые проблемы в системе обучения арифметике, алгебре и геометрии в основной школе. По всем содержательным блокам в отдельных регионах (из анализировавшейся выборки) выявились серьезные недостатки в подготовке учащихся. Многие выпускники продемонстрировали невладение важнейшими элементарными умениями, безусловно, являющимися опорными для дальнейшего изучения курса математики и смежных дисциплин. Это, прежде всего, решение неравенств с одной переменной и их систем; перевод условия задачи на математический язык (составление выражения, уравнения); работа с формулой; чтение графиков функций; понимание графической иллюстрации решения систем уравнений; применение основных геометрических фактов для распознания верных и неверных утверждений о геометрических фигурах.

Анализ решаемости заданий по категориям познавательной деятельности показал, что наибольшую трудность для выпускников IX класса, как и в предшествующие годы, составляет категория «решение задачи», а также задания, апеллирующие к базовым знаниям и пониманию существа вопроса. Что касается категории «практическое применение», то наметился явный рост результатов.

Включение в экзамен заданий по теме «Вероятности и статистика», а также заданий из курса геометрии в целом показал принципиальную возможность развития содержания экзамена в этом направлении.

На основе проведенного анализа можно сделать некоторые общие рекомендации учителям, ведущим преподавание и подготовку к экзаменам. Необходимо обращать внимание на формирование в ходе обучения основ знаний и не форсировать продвижение вперед, пропуская или сворачивая этап введения новых понятий и методов. Важно для обеспечения понимания привлекать наглядные средства, например: координатную прямую при решении неравенств и систем неравенств, график квадратичной функции при решении квадратных неравенств, графики при объяснении смысла понятий уравнения с двумя переменными, решения системы уравнений с двумя переменными. Важно постоянно обучать приемам самоконтроля. Например, при разложении многочлена на множители полезно приучить учащихся для проверки выполнить обратную операцию; при построении графика функции – проконтролировать себя, опираясь на известные свойства графика. Иными словами, подготовка к экзамену осуществляется не в ходе массированного решения вариантов – аналогов экзаменационных работ, а в ходе всего учебного процесса и состоит в формировании у учащихся некоторых общих учебных действий, способствующих более эффективному усвоению изучаемых вопросов. На этапе подготовки к экзамену работа с учащимися должна носить дифференцированный характер. Не надо навязывать «слабому» школьнику необходимость решения задач повышенного и тем более высокого уровня, лучше дать ему возможность проработать базовые знания и умения. Но точно так же не надо без необходимости задерживать «сильного» ученика на решении заданий базового уровня. Учителю следует ставить перед каждым учащимся ту цель, которую он может реализовать в соответствии с уровнем его подготовки, при этом возможно опираться на самооценку и устремления каждого учащегося.